Exercice 1 Roue de nombres.

On peut bien sûr compléter de 1 à 21 le tableau :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5	4	3

On peut aussi constater que la somme des deux nombres qui coïncident est toujours un multiple de 8 : d’abord 8, puis 16 et enfin 24. On fait donc 24-21=3 et on trouve le nombre cherché.

Le nombre est donc 3.

Exercice 2 Les deux maisons.

Essayons de trouver le numéro exactement entre les deux numéros de des maisons :
comme la somme est 120 le numéro central est $120 \div 2 = 60$.
L'écart entre les deux maisons est de 20, on le partage en 2 pour avoir l'écart avec le nombre central : $20 \div 2 = 10$. Pour avoir les deux numéros de maison on fait $60+10=70$ et $60-10=50$.

On vérifie que $50+70=120$ et que $70-50=20$.

Le numéro de la maison de Léa étant le plus grand c'est donc le n° 70.

Exercice 3 De 1 à 15.

Il y a 8 nombres impairs et 7 nombres pairs parmi les nombres de 1 à 15.
S'il n' y a jamais deux nombres impairs dans deux cases qui se touchent par un côté, cela veut dire que tous les nombres impairs doivent être dans des cases de même couleur.
Comme il y a 8 cases grises et 7 cases blanches, tous les nombres impairs se trouvent sur des cases grises.
$1+3+5+7+9+11+13+15=(1+15)+(3+13)+(5+11)+(7+9)=16+16+16+16=16\times4=64$.

La somme des 8 nombres est de 64.

Exercice 4 Les allumettes.

Partons de la fin :
Il ne doit rester aucune allumette. (0 est gagnant).
Donc le tour précédent il reste 1,2 ou 3 allumettes. (1,2,3 sont perdants).
Le tour d'avant il faut donc qu'il ne reste que 4 allumettes. En effet l'autre joueur est obligé d'en prendre 1,2 ou 3 et de se retrouver dans une position perdante. (4 est gagnant).
Encore avant il reste 5,6 ou 7 allumettes. (5,6,7 sont perdants).
Le tour d'avant il faut donc qu'il ne reste que 8 allumettes. (8 est gagnant).
Pour aboutir à cette position gagnante il faut donc que Mathilde prenne 2 allumettes puisqu'il y en a 10 au départ.

Mathilde doit prendre 2 allumettes.

Exercice 5 Qui a volé l’orange ?

Si Alice dit la vérité (Fanny est la voleuse), alors Maël ment (il dit que c’est Alice la voleuse) et Fanny ment (elle dit que Alice est une menteuse). Ce n’est pas possible car un seul enfant a menti.

Donc Alice ment et les autres disent la vérité :

- Maël dit vrai : c’est Alice la voleuse.
- Kévin dit vrai : ce n’est pas le voleur.
- Fanny dit vrai : Alice ment.

En conclusion, c’est Alice qui a volé l’orange.

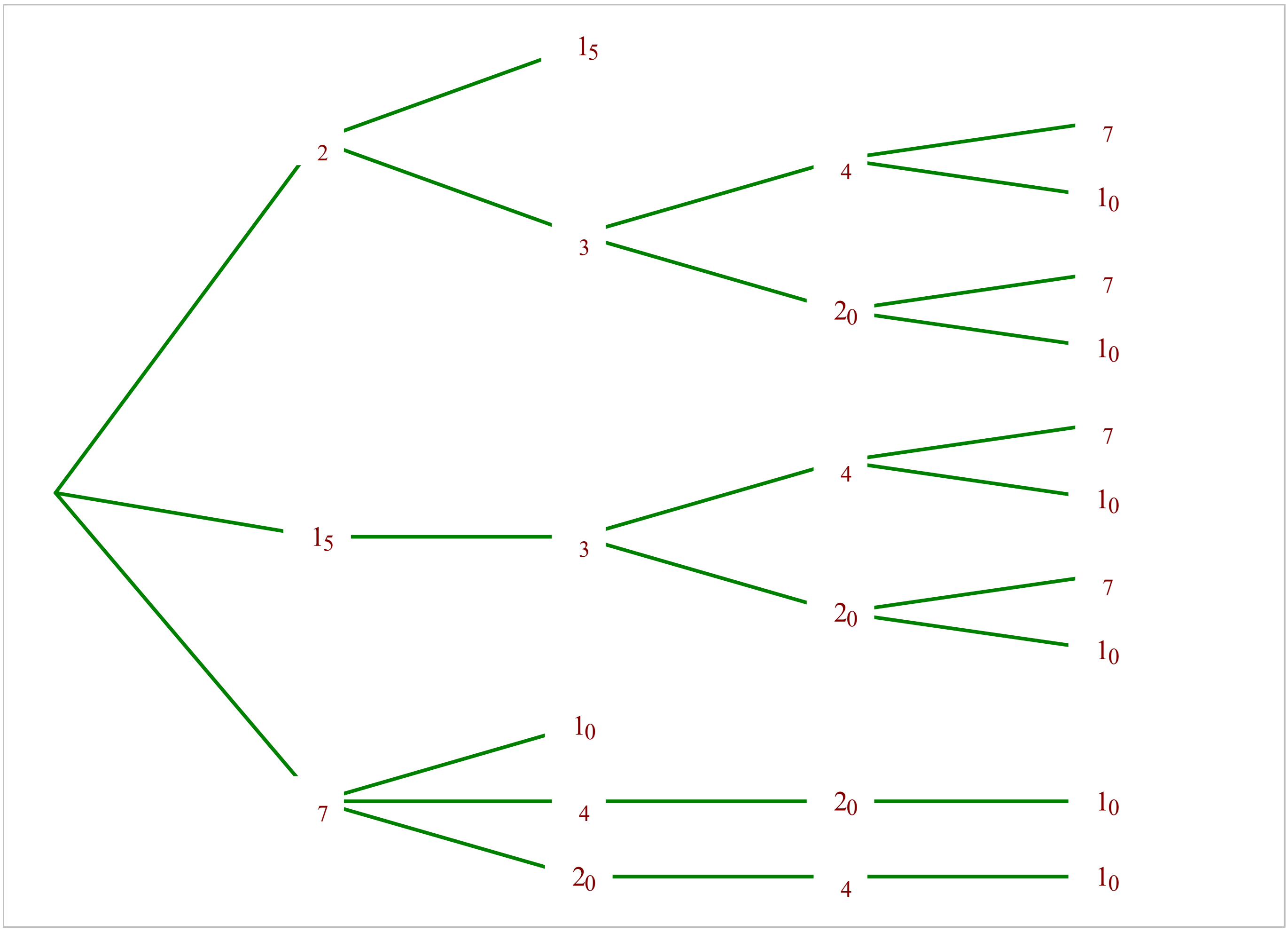
Exercice 6 Empilement de dés.

Pour le dé du haut une seule face est cachée.
Pour trouver la somme maximum au final il vaut mieux que cette face soit le 2 car le 1 est visible.
1+3+4+5+6=19.
Pour le dé en dessous, 4 faces sont cachées. Les faces visibles peuvent être au maximum le 5 et le 6.
5+6=11.
Pour le dé de devant, 2 faces sont cachées dont celle opposée au 1 (c'est à dire 7-1=6) ; l'autre peut être au minimum le 2. On a alors 1+3+4+5=13.
Pour le dé de droite, 2 faces (non opposées) sont cachées qui peuvent être 2 et 3 car le 1 est visible.
1+4+5+6=16.
Au total on a 19+11+13+16=59.

La somme des nombres visibles est donc au maximum de 59.

Exercice 7 Balade en forêt.

Faisons un « arbre mathématique » de toutes les possibilités de revenir au départ en ne comptant pas deux fois le même circuit fait dans l'autre sens :



Calculons toutes les distances des circuits passant une seule fois par le départ :
2+15=17.
2+3+4+7=16.
2+3+4+10=19.
2+3+20+7=32.
2+3+20+10=35.
15+3+4+7=29.
15+3+4+10=32.
15+3+20+7=45.
15+3+20+10=48.
7+10=17.
7+4+20+10=41.
7+20+4+10=41.

Calculons toutes les distances des circuits passant deux fois par le départ :
2+15+7+10=34.
2+15+7+4+20+10=58.

Sur tous les circuits, on trouve 11 distances différentes:16, 17, 19, 29, 32, 34, 35, 41, 45, 48 et 58 hm.

Il faut donc 11 jours.

Exercice 8 Partage équitable.

1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 qu'on ne peut pas partager en deux. Impossible pour 9.
45+10=55 est aussi impair. Impossible pour 10.
55+11=66. 66÷2=33=11+10+9+3=8+7+6+5+4+2+1. C'est possible pour 11.
66+12=78. 78÷2=39=12+11+10+6=9+8+7+5+4+3+2+1. C'est possible pour 12.
78+13=91 qui est impair. Impossible pour 13.
91+14=105 qui est impair. Impossible pour 14.
105+15=120. 120÷2=60=15+14+13+12+6=11+10+9+8+7+5+4+3+2+1. C'est possible pour 15.
120+16=136. 136÷2=68=16+15+14+13+10=12+11+9+8+7+6+5+4+3+2+1.
C'est possible pour 16.
136+17=153 qui est impair. Impossible pour 17.
153+18=171 qui est impair. Impossible pour 18.
171+19=190. 190÷2=95=19+18+17+16+15+10=14+13+12+11+9+8+7+6+5+4+3+2+1.
C'est possible pour 19.
190+20=210. 210÷2=105=20+19+18+17+16+15=14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1.
C'est possible pour 20.

On peut faire ce partage dans 6 cas.

Exercice 9 Maths en jean.

0,6 m²=6000 cm².
20 % de 6000= 20× (6000÷100)=20×60=1200. L’aire des trous est de 1200 cm².

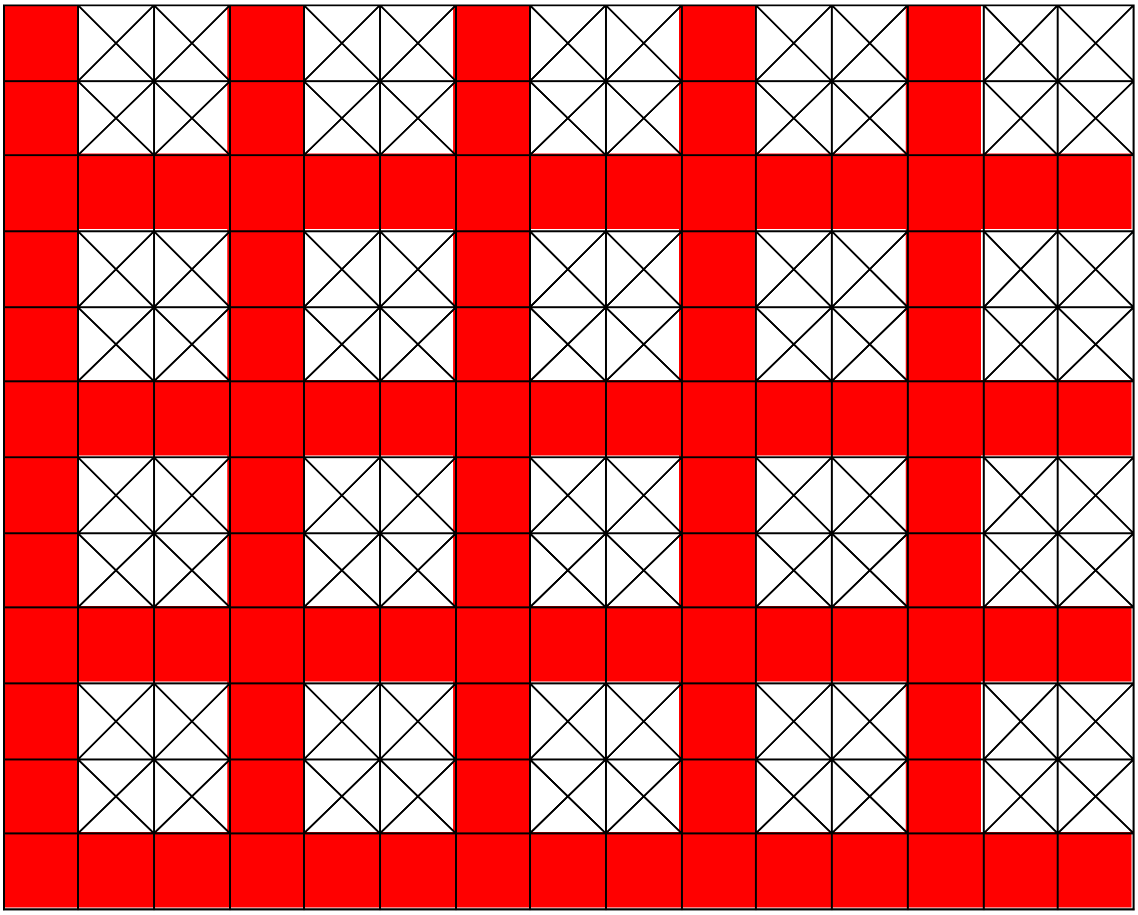
L’écart entre les deux aires est de 6000-1200=4800 cm².
À chaque lavage cet écart diminue de 10+10=20 cm².

4800÷20=480÷2=240.

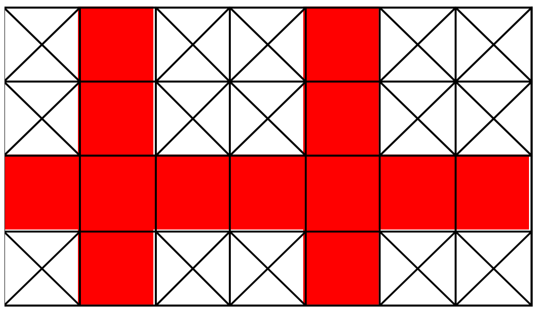
Il y a 1 solution : le nombre de lavages est de 240.

Exercice 10 Morpion.

Si on essaie de faire un pavage plus large en respectant les conditions du morpion : on obtient :

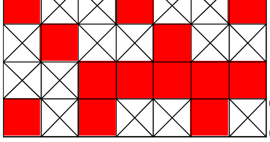


Puis en extrayant une grille de 7 sur 4 de celle-ci, on obtient au maximum :

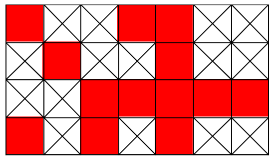


C'est à dire un placement de 15 pions.
Nous avons 5 colonnes sur 7 qui contiennent 3 pions ce qui est le maximum.
Nous avons 3 lignes sur 4 qui contiennent 5 pions ce qui est le maximum.

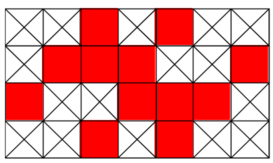
Si on essaie de placer des pions sur l'un des 12 pentaminos,
on s'aperçoit qu'il y en a toujours trois d'alignés.
On ne peut donc placer les pions que sur des tetraminos au maximum (de deux formes possibles).



Essayons de placer 4 tetraminos :
on n'arrive qu'à en placer 3 au maximum.
Cela confirme notre observation première.



Mais des configurations à 16 pions existent :



On ne peut placer au maximum que 16 pions.

Exercice 11 Le nombre magique.

ABCD est le nombre de Mathilde.
B=2×A et D=2×C. Donc 0<A<5 et 0<C<5.
La somme des chiffres vaut A+2×A +C+2×C =3×(A+C).
ABCD se calcule ainsi :
1000×A+100×B+10×C+D=1000×A+200×A+10×C+2×C=1200×A+12×C=12×(100×A+C).

Faisons la division :
$\frac{12\times(100\times A+C)}{3\times(A+C)}=\frac{4\times(100\times A+C)}{(A+C)}$ Ce résultat doit être un nombre entier.

Cherchons les possibilités pour la somme A+C : il y en a 7.

A+C=2 c'est à dire (A;C)=(1;1) on peut diviser 4 par 2 c'est bon. 1212 est une solution.

A+C=3 donc le nombre A0C est divisible par 3. (A0C=100×A+10×0+C) c'est encore bon :
(A;C)=(1;2) ou (A;C)=(2;1) donc 1224 et 2412 sont des solutions.

A+C=4 et on peut diviser 4 par 4, c'est encore bon :
(A;C)=(1;3) ou (A;C)=(2;2) ou (A;C)=(3;1) donc 1236, 2424 et 3612 sont des solutions.

A+C=5 donc le nombre A0C doit être divisible par 5 donc C=0 ou C=5 ce qui est impossible.

A+C=6 donc le nombre A0C est divisible par 3, et 4 est divisible par 2, cela fonctionne :
(A;C)=(2;4) ou (A;C)=(3;3) ou (A;C)=(4;2) donc 2448, 3636 et 4824 sont des solutions.

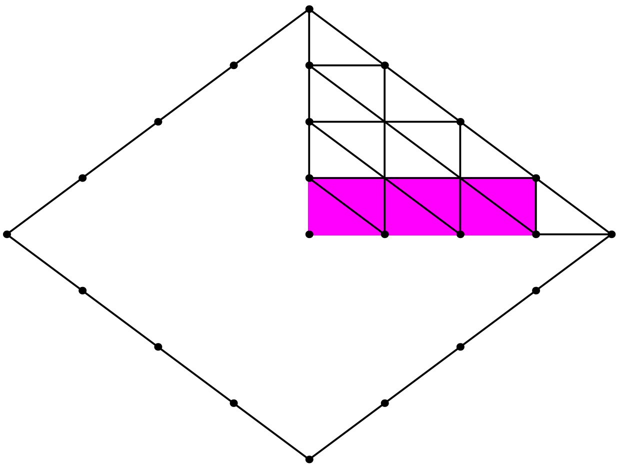
A+C=7 donc le nombre A0C doit être divisible par 7. Or 304=7×43+3 et 403=7×57+4.
Cela ne fonctionne pas.

A+C=8 =4×2 il faut donc que le nombre A0C soit divisible par 2 ce qui est le cas car C=4.
(A;C)=(4;4) et le nombre 4848 est une solution.

Au total nous avons 10 solutions : 1212, 1224, 1236, 2412, 2424, 2448, 3612, 3636, 4824 et 4848.

Exercice 12 Le rapport géométrique.

Raisonnons juste sur un quart du losange :

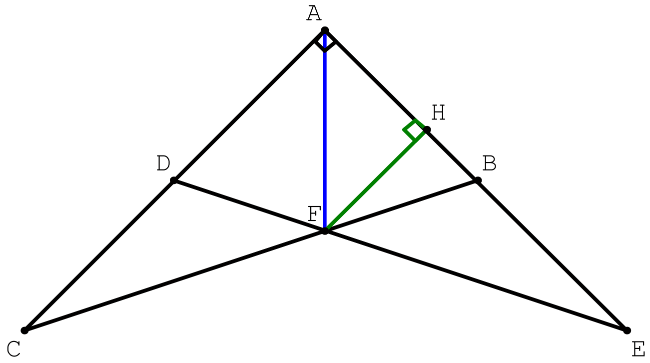


On a partagé notre quart de losange en 16 triangles identiques et on observe 6 triangles colorés. La fraction est donc de $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}=0{,}375$.

Donc il y a 1 solution : Le rapport vaut : 0,375.

Exercice 13 La condition d'égalité.

Traçons [AF] :



La droite (AF) est un axe de symétrie de la figure car les triangles ABC et ADE sont isométriques.
Par conséquent les aires des triangles ADF et ABF sont égales, ainsi que celles de CFD et de BFE.
L'aire de ADFB étant égale à la somme des aires des triangles CFD et BFE,
on peut donc dire que les aires des triangles ABF et BFE sont égales.

Plaçons H au pied de la hauteur de AFE issue de F.

$$\text{Aire}(ABF)=\frac{AB\times AH}{2} \quad \text{et} \quad \text{Aire}(BFE)=\frac{BE\times AH}{2}$$

L'égalité de ces deux aires nous prouvent que AB=BE et que B est donc le milieu de [AE].

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AE}=\frac{1}{2}.$$

Le rapport est donc de $\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$.

Exercice 14 En ajoutant 20.

Si le nombre de Mathilde est C. Les nombres A et B s'écrivent 20C et C20.
Si $\frac{A}{B}=\frac{2}{5}$ alors $\frac{20C}{2}=\frac{C20}{5}$ et si $\frac{B}{A}=\frac{2}{5}$ alors $\frac{20C}{5}=\frac{C20}{2}$.
Étudions d'abord le premier cas :

- Si C possède 1 chiffre on a (200+C)×5=(100C+20)×2.
  1000+5C=200C+40 donc 200+C=40C+8 (en divisant par 5) puis 192=39C
  et 64=13C en divisant par 3. Or 64 n'est pas dans la table de 13, ce n'est pas possible.
- Si C possède 2 chiffres on a (2000+C)×5=(100C+20)×2.
  10 000+5C=200C+40 donc 2000+C=40C+8 (en divisant par 5) puis 1992=39C
  et 664=13C en divisant par 3. Or 664 n'est pas dans la table de 13, ce n'est pas possible.
- Si C possède 3 chiffres on a (20 000+C)×5=(100C+20)×2.
  100 000+5C=200C+40 donc 20 000+C=40C+8 (en divisant par 5) puis 19992=39C
  et 6664=13C en divisant par 3. Or 6664 n'est pas dans la table de 13, ce n'est pas possible.
- Si C possède 4 chiffres on a (200 000+C)×5=(100C+20)×2.
  1 000 000+5C=200C+40 donc 200 000+C=40C+8 (en divisant par 5) puis 199992=39C
  et 66664=13C en divisant par 3. Or 66664 ÷13=5128. On a une solution.
- Si C possède 5 chiffres on a (2 000 000+C)×5=(100C+20)×2.
  10 000 000+5C=200C+40 donc 2 000 000+C=40C+8 (en divisant par 5) puis 1999992=39C
  et 666664=13C en divisant par 3. Or 666664 n'est pas dans la table de 13, ce n'est pas possible.
- Si C possède 6 chiffres on a (20 000 000+C)×5=(100C+20)×2.
  100 000 000+5C=200C+40 donc 20 000 000+C=40C+8 (en divisant par 5) puis 19999992=39C
  et 6666664=13C en divisant par 3. Or 6666664 n'est pas dans la table de 13, ce n'est pas possible.

$$\begin{array}{l|l} 664 & 13 \\ \cline{2-2} 14 & 51 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6664 & 13 \\ \cline{2-2} 16 & 512 \\ 34 & \\ 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 66664 & 13 \\ \cline{2-2} 16 & 5128 \\ 36 & \\ 104 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 666664 & 13 \\ \cline{2-2} 16 & 51281 \\ 36 & \\ 106 & \\ 24 & \\ 11 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6666664 & 13 \\ \cline{2-2} 16 & 512820 \\ 36 & \\ 106 & \\ 26 & \\ 04 & \\ 4 & \end{array}$$

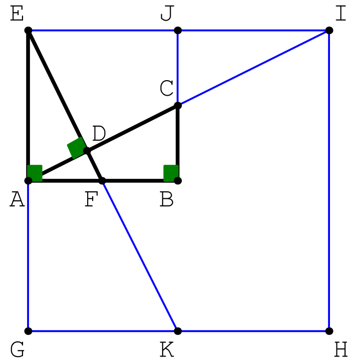
Étudions maintenant le deuxième cas :
Si C possède N chiffres alors $(20\times10^N+C)\times2=(100\times C+20)\times5$ donc $40\times10^N+2C=500C+100$.
$40\times10^N-100=498C$

Si on regarde l'ordre de grandeur $C\approx\frac{40\times10^N}{500}\approx\frac{4000\times10^{N-2}}{500}\approx8\times10^{N-2}$.
Cela voudrait dire que C possède N-1 chiffres ce qui est contradictoire avec notre hypothèse.

Il y a donc 1 solution : c'est le nombre 5128.

Exercice 15 Ma part d'étoile.

Cherchons à calculer l'aire d'un triangle blanc (ADE sur la figure suivante) plutôt que celle de l'étoile.



Les triangles AEF et ABC sont égaux donc si $\alpha=\widehat{CAB}$ alors $\alpha=\widehat{DEA}$, $\widehat{DAE}=\widehat{BAE}-\widehat{CAB}=90-\alpha$ et enfin $\widehat{EDA}=180-\widehat{AED}-\widehat{DEA}=180-\alpha-(90-\alpha)=90°$.

Le triangle AED est donc rectangle et est semblable au triangle AEF.

$\tan(\widehat{AEF})=\frac{AF}{AE}=\frac{1}{2}=\tan(\widehat{AED})=\frac{AD}{DE}$. Donc DE=2×AD.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AED :

AE²=AD²+DE²AD²+4AD²=5AD². d'où $AE=AD\times\sqrt{5}$ $AD=\frac{AE}{\sqrt{5}}$ $DE=\frac{AE\times 2}{\sqrt{5}}$.

Calculons l'aire du triangle AED :

$$Aire=\frac{AD\times DE}{2}=\frac{AE}{\sqrt{5}}\times\frac{AE\times 2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{2}=\frac{AE^2}{5}.$$

La proportion de zones blanches dans ce carré est donc de $\frac{8\times\frac{AE^2}{5}}{4\,AE^2}=\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{40}{100}=40\,\%$.

100-40=60.

L'aire de l'étoile représente donc 60 % de l'aire du carré.

Exercice 16 Douze diviseurs.

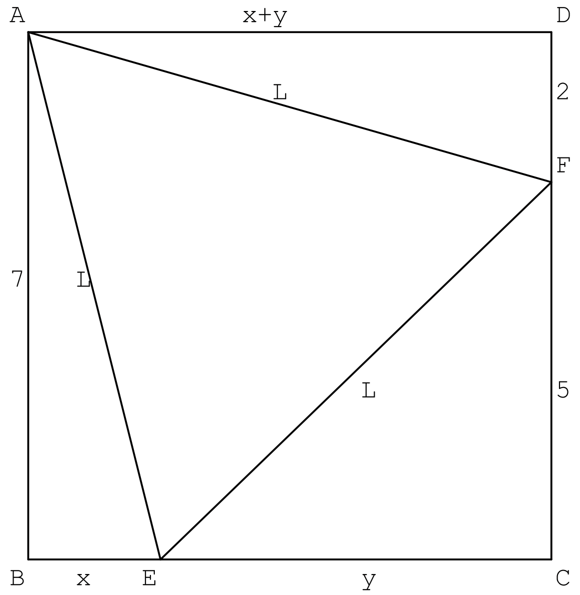
La décomposition d'un nombre N en facteurs premiers s'écrit $N=n_1^{\alpha_1}\times n_2^{\alpha_2}\times\cdots\times n_A^{\alpha_A}$
et le nombre de ses diviseurs est $(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)\times\cdots\times(\alpha_A+1)$
Or $12=6\times2=4\times3=3\times2\times2$.
$2020=2^2\times5\times101$ et ses diviseurs sont 1,2,4,5,10,20,101,202,404,505,1010,2020.

On peut avoir $\alpha_1=11$ Donc au minimum 2^{11} = 2048. Mais le seul diviseur premier est 2 (qui est le deuxième diviseur)
On peut aussi avoir $\alpha_1=5$ et $\alpha_2=1$ Donc au minimum $2^5\times A$ avec A premier.
$2020=32\times63+4$. 67 est le premier nombre premier plus grand que 63 et $2^5\times67=2144$.
Si c'est $3^5\times A$ avec A premier :
$2020=243\times8+76$. 11 est le premier nombre premier plus grand que 8 et $3^5\times11=2673$.
On peut aussi avoir $\alpha_1=3$ et $\alpha_2=2$ Donc au minimum $2^3\times A^2$ avec A premier.
$2020=8\times252+4$. $17^2=289$ est le premier carré d'un nombre premier supérieur à 252 et $2^3\times17^2=2312$.
Si c'est $3^3\times A^2$ avec A premier :
$2020=27\times74+22$. $11^2=121$ est le premier carré d'un nombre premier supérieur à 74 et $3^3\times11^2=3267$.
Si c'est $5^3\times A^2$ avec A premier :
$2020=125\times16+20$. $7^2=49$ et $5^3\times7^2=6125$.
Si c'est $7^3\times A^2$ avec A premier :
$2020=343\times5+305$. $3^2=9$ et $7^3\times3^2=3087$.
On peut aussi avoir $\alpha_1=2$ et $\alpha_2=1$ et $\alpha_3=1$ Donc au minimum $2^2\times3\times A$ avec A premier.
$2020=12\times168+4$. A=173 et $2^2\times3\times173=2076$.
Ses 7 premiers diviseurs sont 1,2,3,4,6,12,173 et 173 est premier.
Si c'est $2^2\times5\times A$ avec A premier. A>101 donc A=103 et $2^2\times5\times103=2060$.
Ses 7 premiers diviseurs sont 1,2,4,5,10,20,103 et 103 est premier.
Si c'est $2^2\times7\times A$ avec A premier : $2020=28\times72+4$. A=73 et $2^2\times7\times73=2044$.
Ses 7 premiers diviseurs sont 1,2,4,7,14,28,73 et 73 est premier.
Si c'est $2^2\times11\times A$ avec A premier : $2020=44\times45+40$. A=47 et $2^2\times11\times47=2068$.
Ses 7 premiers diviseurs sont 1,2,4,11,22,44,47 et 47 est premier.
Si c'est $2^2\times13\times A$ avec A premier : $2020=52\times38+44$. A=41 et $2^2\times13\times41=2132$.
Si c'est $2^2\times17\times A$ avec A premier : $2020=68\times29+46$. A=31 et $2^2\times17\times31=2108$.
Si c'est $2^2\times19\times A$ avec A premier : $2020=76\times26+44$. A=29 et $2^2\times19\times29=2204$.
Si c'est $2^2\times23\times A$ avec A premier : $2020=92\times21+88$. A=29 aussi car $29\neq23$.
Si c'est $3^2\times2\times A$ avec A premier : $2020=18\times112+4$. A=113 et $3^2\times2\times113=2034$.
Ses 7 premiers diviseurs sont 1,2,3,6,9,18,113 et 113 est premier.
Si c'est $3^2\times5\times A$ avec A premier : $2020=45\times44+40$. A=47 et $3^2\times5\times47=2115$.
Si c'est $3^2\times7\times A$ avec A premier : $2020=63\times32+4$. A=37 et $3^2\times7\times37=2331$.
Si c'est $3^2\times11\times A$ avec A premier : $2020=99\times20+40$. A=23 et $3^2\times11\times23=2277$.
Si c'est $3^2\times13\times A$ avec A premier : $2020=117\times17+31$. A=19 et $3^2\times13\times19=2223$.
Si c'est $5^2\times2\times A$ avec A premier : $2020=50\times40+20$. A=41 et $5^2\times2\times41=2050$.
Ses 7 premiers diviseurs sont 1,2,5,10,25,41,50 et 50 n'est pas premier.
Si c'est $5^2\times3\times A$ avec A premier : $2020=75\times26+70$. A=29 et $5^2\times3\times29=2175$.
Si c'est $5^2\times7\times A$ avec A premier : $2020=175\times11+95$. A=13 et $5^2\times7\times13=2275$.
Si c'est $7^2\times2\times A$ avec A premier : $2020=98\times20+60$. A=23 et $7^2\times2\times23=2254$.
Si c'est $7^2\times3\times A$ avec A premier : $2020=147\times13+109$. A=17 et $7^2\times3\times17=2499$.
Si c'est $7^2\times5\times A$ avec A premier : $2020=245\times8+60$. A=11 et $7^2\times5\times11=2695$.
Si c'est $11^2\times2\times A$ avec A premier : $2020=242\times8+84$. A=13 et $11^2\times2\times13=3146$.
Si c'est $11^2\times3\times A$ avec A premier : $2020=363\times5+205$. A=7 et $11^2\times3\times7=2541$.
Si c'est $13^2\times2\times A$ avec A premier : $2020=338\times5+330$. A=7 et $13^2\times2\times7=2366$.
Si c'est $13^2\times3\times A$ avec A premier : $2020=507\times3+499$. A=5 et $13^2\times3\times5=2535$.
Si c'est $17^2\times2\times A$ avec A premier : $2020=578\times3+286$. A=5 et $17^2\times2\times5=2890$.
Si c'est $19^2\times2\times A$ avec A premier : $2020=722\times2+576$. A=3 et $19^2\times2\times3=2166$.

Il y a 5 solutions. L'année future est : 2034, 2044, 2060, 2068 ou 2076.

Exercice 17 La forêt triangulaire.

Insérons notre triangle dans un rectangle :



ABE est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore : $L^2=7^2+x^2=49+x^2$ et $x^2=L^2-49$.
De même ECF est rectangle en C donc $L^2=5^2+y^2=25+y^2$ et $y^2=L^2-25$.
Enfin ADF est rectangle en D donc $L^2=2^2+(x+y)^2$
D'où $(x+y)^2=L^2-4$.

Prenons les racines carrées de ces trois équations :

$$\sqrt{L^2-49}+\sqrt{L^2-25}=\sqrt{L^2-4}$$

Mettons-là au carré :

$$L^2-49+L^2-25+2\times\sqrt{(L^2-49)(L^2-25)}=L^2-4.$$
$$2\times\sqrt{(L^2-49)(L^2-25)}=70-L^2.$$

Mettons-là à nouveau au carrré :

$$4\times(L^2-49)(L^2-25)=(70-L^2)^2.$$
$$4(L^4-74L^2+49\times 25)=4900+L^4-140L^2.$$
$$4L^4-296L^2+4900=4900+L^4-140L^{2.}$$
$$3L^4=156L^{2.}$$
$$L^2=52.$$

On peut simplifier par L² car L>0.

$$L=\sqrt{52}=\sqrt{4\times 13}=\sqrt{4}\times\sqrt{13}=2\sqrt{13}\approx 2\times 3{,}6056\approx 7{,}2112.$$

Comme on doit arrondir au mètre le plus proche alors la réponse est 7,211 km.

Il y a 1 solution.

Exercice 18 Carrés petits et grands.

Appelons C la longueur et L la largeur du rectangle.
On compte C×L carrés de côté 1, (C-1)(L-1) carrés de côté 2, (C-2)(L-2) carrés de côté 3, etc.
Faisons la somme :

$$\sum_{i=1}^{L} i(i+C-L)=\sum_{i=1}^{L} i^2+(C-L)\sum_{i=1}^{L} i=\frac{L(L+1)(2L+1)}{6}+(C-L)\frac{L(L+1)}{2}=\frac{L(L+1)}{6}\times(2L+1+3C-3L)$$

$$=\frac{L(L+1)(3C-L+1)}{6}=1365.$$

Or 1365=3×5×7×13 donc L(L+1)(3C-L+1)=$2\times3^2\times5\times7\times13$=8190.

Cherchons tous les diviseurs de 8190 :
à 0 facteur premier : 1 ;
à 1 facteur premier : 2;3;5;7;13 ;
à 2 facteurs premiers : 2×3=6 ; 2×5=10 ; 2×7=14 ; 2×13=26; 3×3=9 ; 3×5=15 ; 3×7=21 ; 3×13=39; 5×7=35 ; 5×13=65 ; 7×13=91 ;
à 3 facteurs premiers : 2×3^2 =18 ; 2×3×5=30 ; 2×3×7=42 ; 2×3×13=78 ; 2×5×7=70 ; 2×5×13=130 ; 2×7×13=182 ; $3^2\times5$=45 ; $3^2\times7$=63 ; $3^2\times13$=117 ; 3×5×7=105 ; 3×5×13=195 ; 3×7×13=273 ; 5×7×13=455 ;
à 4 facteurs premiers : 8190÷6=1365 ; 8190÷10=819 ; 8190÷14=585 ; 8190÷26=315 ; 8190÷9=910 ; 8190÷15=546 ; 8190÷21=390 ; 8190÷39=210 ; 8190÷35=234 ; 8190÷65=126 ; 8190÷91=90 ;
à 5 facteurs premiers : 8190÷2=4095 ; 8190÷3=2730 ; 8190÷5=1638 ; 8190÷7=1170 ; 8190÷13=630 ;
à 6 facteurs premiers : 8190.

Classons-les par ordre croissant pour mieux voir ceux qui sont consécutifs (il est inutile de mettre les derniers qui ne peuvent pas être consécutifs) :
1;2;3;5;6;7;9;10;13;14;15;18;21;26;30;35;39;42;45;63;65;70;78;90;91.

Les paires de diviseurs consécutifs sont (1;2) ; (2;3) ; (5;6) ; (6;7) ; (9;10) ; (13;14) ; (14;15) ; (90;91).

Si L=1, L+1=2, et 3C-1+1= 4095 donc 3C=4095, C=1365. L×C=1×1365=1365 carrés.
Si L=2, L+1=3, et 3C-2+1= 1365 donc 3C=1366, C'est impossible.
Si L=5, L+1=6, et 3C-5+1= 273 donc 3C=277, C'est impossible.
Si L=6, L+1=7, et 3C-6+1= 195 donc 3C=200, C'est impossible.
Si L=9, L+1=10, et 3C-9+1= 91 donc 3C=99, C=33. L×C=9×33=297 carrés.
Si L=13, L+1=14, et 3C-13+1= 45 donc 3C=57, C=19. L×C=13×19=247 carrés.
Si L=14, L+1=15, et 3C-14+1= 39 donc 3C=52, C'est impossible.
Si L=90, L+1=91, et 3C-90+1= 1 donc 3C=90, C=30. C'est impossible car 30<90.

Donc il y a 3 solutions : On compte 1365, 297 ou 247 petits carrés.