Explications sur la formule de l'exercice 1.

Merci pour leurs envois rapides de solutions à :

Chia-Tche Chang, Matthieu Caressa, Niborski Rodolfo, C. MALET , Jacques Delaire, Jean-Claude BERMOND, François BULOT, Joachim MURAT-DELFAU, Christian Romon, Daniel Collignon, et merci à tous ceux que je n'ai pas la place de citer.

<u>Envoi de Niborski Rodolfo</u>

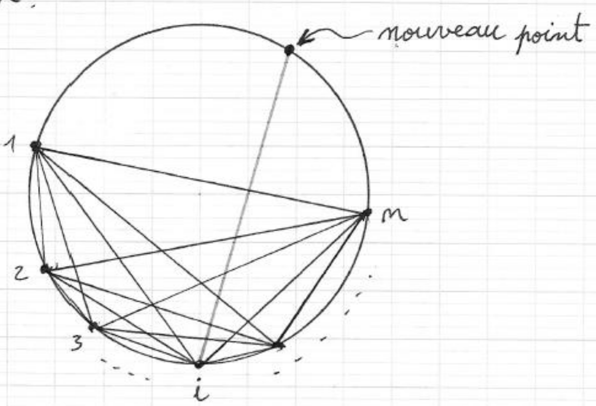
Soit R_n le nombre maximal de régions obtenues en reliant n points du cercle. On a alors

$$R_n = \frac{1}{24}\left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24\right),$$

ou encore, sous forme partiellement factorisée :

$$R_n = 1 + \frac{n(n-1)}{24}\left(n^2 - 5n + 18\right).$$

<u>Démonstration</u> : Supposons que n points sont déjà placés sur le cercle et reliés. On les numérote de 1 à n en tournant autour du cercle. Puis on place un nouveau point entre les points 1 et n.



Le segment qui relie le nouveau point et le point numéro i coupe tous les segments entre les points a et b tels que $a < i$ et $b > i$. Il y a $(i-1)(n-i)$ tels segments, donc $(i-1)(n-i)$ nouveaux points d'intersection.

Le nouveau segment traverse r régions et les coupe en deux, ajoutant ainsi r au nombre total de régions. Mais il ne quitte une région que lorsqu'il traverse un segment déjà tracé, c'est-à-dire lorsqu'il passe par un des nouveaux points d'intersection. D'où $r = (i-1)(n-i)+1$.

En reliant le nouveau point à tous les points existants, le nombre de régions augmente donc de

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(i-1)(n-i)+1\right].$$

En utilisant les formules $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

on trouve que cette somme vaut $\frac{1}{6}(n^3-3n^2+8n)$.

D'où $R_{n+1} = R_n + \frac{1}{6}(n^3-3n^2+8n)$.

Mais $R_n = R_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(R_{k+1}-R_k) = 1 + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-3k^2+8k)$.

En utilisant à nouveau les mêmes formules, ainsi que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, on trouve

$$R_n = 1 + \frac{n(n-1)}{24}(n^2-5n+18).$$

Remarque : chaque nouveau point peut être placé de manière à ce que toutes les intersections soient distinctes. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de droites passant par deux points d'intersection existants, mais il y a toujours une infinité de choix pour le placement du nouveau point. C'est pourquoi dans le raisonnement précédent, on a supposé que les n points réalisaient déjà le nombre maximal R_n de régions possibles et que tous les nouveaux points d'intersection résultant de l'introduction du nouveau point étaient tous distincts.

Envoi de ChangChia-Tche :

En général pour **(n+1)** points sur le cercle, le nombre max de régions est de :

1 + n*(n+1)(n^2 -3n + 14)/24

Soit f(n) le nombre max de régions pour n points sur le cercle. Pour maximiser le nombre de régions, il ne doit pas y avoir de point à l'intérieur du n-gone correspondant à une intersection de 3 diagonales (ou plus). C'est toujours possible d'avoir des intersections simples de diagonales en déplaçant légèrement un des sommets du n-gone.

Les premières valeurs de f(n) sont données dans l'énoncé.

Pour calculer la valeur de $f(n+1)$, on part d'un n-gone avec tous les segments déjà tracés, on rajoute un nouveau point sur le cercle, on trace les n cordes supplémentaires partant du nouveau point, et on regarde combien de nouvelles régions sont créées.

Chacune de ces cordes c passant par le nouveau point crée une nouvelle région, plus une nouvelle région supplémentaire pour chaque ancienne corde qui intersecte c. Il faut donc compter le nombre de cordes croisant chaque corde c.

Numérotons les sommets du n-gone dans l'ordre $x1, x2, \ldots, xn$ et plaçons le nouveau point $x(n+1)$ sur le cercle entre xn et x1. Appelons ci la nouvelle corde reliant $x(n+1)$ à xi. Cette corde partage le cercle en deux zones (de chaque côté de ci). Puisqu'on a numéroté les points dans l'ordre, il y a alors $(i-1)$ points d'un côté de ci et $n-i$ points de l'autre côté. Donc, la nouvelle corde ci intersecte $(i-1)(n-i)$ anciennes cordes, et le nombre de nouvelles zones créées est de $1 + (i-1)(n-i)$

Ainsi, $f(n+1) = f(n) + \text{somme } [1 + (i-1)(n-i)]$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$= f(n) + \text{somme } [1 + n*i - i^2 - n + i]$

$= f(n) - (n-1)*n - \text{somme } [i^2 - (n+1)*i]$

$= f(n) - n*(n-1) - n*(n+1)*(2n+1)/6 + (n+1)*n*(n+1)/2$

$= f(n) - n*[n-1 + (n+1)((2n+1) - 3(n+1))/6]$

$= f(n) - n*[n-1 - (n+1)(n+2)/6]$

$= f(n) + [n^3 - 3n^2 + 8n]/6$

Donc en général, $f(n+1) = f(1) + \text{somme } [i^3 - 3i^2 + 8i]/6$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$= 1 + [n^2(n+1)^2/4 - 3n(n+1)(2n+1)/6 + 8n(n+1)/2]/6$

$= 1 + [n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 16n(n+1)]/24$

$= 1 + n*(n+1) [n(n+1) - 2*(2n+1) + 16]/24$

$= 1 + n*(n+1) [n^2 + n - 4n - 2 + 16]/24$

$= 1 + n*(n+1) [n^2 -3n + 14]/24$

Pour 8 points : $f(8) = 1 + 7*8 (49 - 21 + 14)/24 = 99$.

Envoi de Jacques Delaire :

Exercice 1 : nombre maximum de régions dans le cas de 8 points …99 régions.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K(n)	1	2	4	8	16	31	57	99	
$k(n+1)-k(n)=n(n^2-3n+8)/6$		1	2	4	8	15	26	42	64
$k(n)=(n^4-6n^3+23n^2-18n+24)/24$	1	2	4	8	16	31	57	99	163

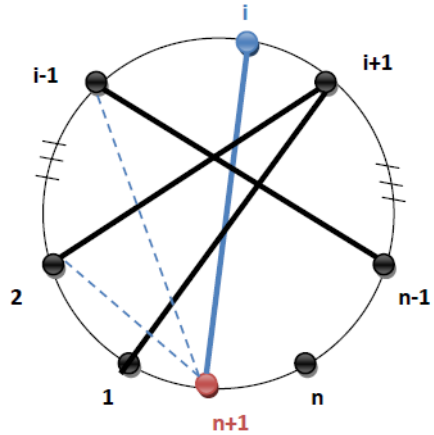
En utilisant la récurrence, on peut démontrer la relation indiquée ci-dessus.

Pour Matthieu Caressa :

Jeu du matheux confiné

3e Vague / Série 2 / Exercice 1 : démonstration

Partant d'un cercle sur lequel on dispose n points et où l'on trace toutes les cordes possibles (tous les points sont reliés 2 à 2), on cherche l'expression générale de la suite U_n donnant le nombre maximum de zones dans cette figure.



Partant de la figure à n points (et donc U_n zones), procédons par récurrence de la façon suivante :
- ajout d'un (n+1)ième point sur le cercle
- ajouts des n nouvelles cordes qu'il est possible de tracer

Au moment d'ajouter la nouvelle corde numéro i (reliant le nouveau point n+1 au point i, i allant de 1 à n), on franchit toutes les droites déjà existantes reliant les i-1 points d'un coté de cette corde avec les n-i points de l'autre coté. Ces droites sont au nombre de :

$$(i-1)\times(n-i)$$

Le nombre de zones traversées est égal à ce nombre de droites + 1.
Ainsi, à l'ajout de la corde i on ajoute le nombre de zones suivant (chaque zone traversée est coupé en 2 par la nouvelle corde) :

$$(i-1)\times(n-i)+1=(n+1)i-i^2+1-n$$

(la figure ci-contre est là pour illustrer le raisonnement, toutes les cordes n'y sont pas représentées pour ne pas surcharger le shéma)

Après ajout de toutes les nouvelles cordes, le nombre de zones augmente de :

$$U_{n+1}-U_n=\sum_{i=1}^{n}(n+1)i-i^2+1-n=(n+1)\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n-n^2$$

On a utilisé ici les formules donnant les sommes des entiers et des carrés des entiers. Finalement :

$$\boldsymbol{U_{n+1}-U_n=\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}}$$

En partant de $U_1=1$, on retrouve bien les observations faites jusqu'à $n=5$ dans l'énoncé.

La formule complète s'obtient de la façon suivante :

$$U_n-U_1=\sum_{k=1}^{n-1}U_{k+1}-U_k=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^3}{6}-\frac{k^2}{2}+\frac{4k}{3}=\frac{1}{6}\times\frac{n^2(n-1)^2}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{4}{3}\times\frac{n(n-1)}{2}$$

Après quelques développements, on obtient :

$$\boldsymbol{U_n=\frac{n^4-6n^3+23n^2-18n}{24}+1=\frac{n(n-1)(n^2-5n+18)}{24}+1}$$

Envoi de Daniel Collignon :

Exercice 1 :
99 et non 128 comme on pourrait l'extrapoler à tort.
Une formule est **1+C(n;2)+C(n;4)** où C(n;p) est le coefficient binomial (nombre de combinaisons de p objets pris parmi n).
* 1 correspond à la région intérieure du cercle
* C(n;2) correspond au nombre de diagonales, car toute diagonale introduit une région supplémentaire
* C(n;4) correspond au nombre de points d'intersection de 2 diagonales distinctes que l'on détermine par 4 points (dans le cas d'une configuration générale où 3 diagonales ne sont jamais concourantes, ce qui est toujours possible par un argument de continuité, en déplaçant l'un des points), car tout point d'intersection introduit une région supplémentaire

Envoi de Jean-Claude Bermond

Nombre maximum de régions créées par les cordes joignant n points d'un cercle

Considérons un ensemble de C cordes et soit $I(C)$ leur nombre de points d'intersection et $R(C)$ le nombre de régions. Alors

$$R(C) = C + I(C) + 1$$

On montre la formule par récurrence. La formule est vraie pour $C = 0$ et $C = 1$ car alors $I = 0$ et $R = 2$. Supposons qu'elle soit vraie pour C. On rajoute une $C+1$ème corde qui intersecte en p points les autres cordes. Dans le cas général (pas de point d'intersection commun à 3 cordes) cela crée $p + 1$ nouvelles régions. On a donc $I(C + 1) = I(C) + p$; $R(C + 1) = R(C) + p + 1$ et donc $R(C + 1) = C + 1 + I(C + 1)) + 1$.

Si on prend n points sur un cercle appelons $C(n)$ le nombre de cordes, $I(n)$ le nombre maximum de points d'intersection et $R(n)$ le nombre maximum de regions .

Le nombre de cordes est le nombre de paires de points soit $C(n) = \binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

Un ensemble de 4 points du cercle donne un point d' intersection. Si de plus tous les points d'intersection sont différents, i y a bijection entre les points d'intersection et les ensembles de 4 points du cercle. Le nombre maximum de points d'intersections est donc égal au nombre de manières de choisir 4 points parmi n, donc $I(n) = \binom{n}{2} = n(n - 1(n - 2)(n - 3))/24$ et

$$R(n) = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + 1 = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24}{24}$$

La table ci-dessous donne les valeurs pour $1 \leq n \leq 8$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
C(n)	0	1	3	6	10	15	21	28
I(n)	0	0	0	1	5	15	35	70
R(n)	1	2	4	8	16	31	57	99

Envoi de Joachim Murat-Delfau (fichier Excel)

Il faut résoudre un polynôme du 4ème degré: P = a * n ^{4} + b * n ^{3} + c * n ^{2} + d * n + e

a	b	c	d	e		
0,04166683	-0,2500015	0,95833767	-0,750004	1		
1/24	- 1/4	23/24	- 3/4	1		SOLVER
						FAUX
n					CIBLE	0
1				0,999999	1	FAUX
2				2	2	FAUX
3				4	4	FAUX
4				8	8	100

On obtient les coefficients du polynôme par SOLVER

$$\mathbf{Q_n = \frac{n^4}{24} - \frac{n^3}{4} + \frac{23n^2}{24} - \frac{3n}{4} + 1}$$